

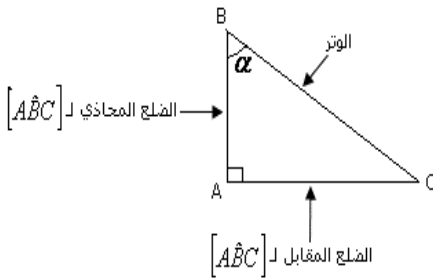
الحساب المثلثي

جيب - جيب التمام - الظل

1 - جيب وجيب التمام وظل زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية :

ABC مثلث قائم الزاوية في A

α قياس للزاوية $[\hat{A}BC]$ بالدرجة ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)



$$\sin(\alpha) = \frac{AC}{BC} \text{ و نكتب}$$

$$\frac{AC}{BC} \text{ هو النسبة } \alpha \text{ جيب}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC} \text{ و نكتب}$$

$$\frac{AB}{BC} \text{ هو النسبة } \alpha \text{ جيب تمام}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{AC}{AB} \text{ و نكتب}$$

$$\frac{AC}{AB} \text{ هو النسبة } \alpha \text{ ظل}$$

الأعداد $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$ تسمى النسب المثلثية للزاوية $[\hat{A}BC]$

ملاحظات :

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } [\hat{A}BC]}{\text{طول الوتر}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{طول الضلع المجازي لـ } [\hat{A}BC]}{\text{طول الوتر}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } [\hat{A}BC]}{\text{طول الضلع المجازي لـ } [\hat{A}BC]}$$

2 - خاصات : α قياس لزاوية حادة غير منعدمة.

(أ)

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$0 < \sin \alpha < 1$ $0 < \cos \alpha < 1$
-------------------------------------	---	--

(ب) إذا كان α و β قياسي زاويتين متتامتين غير منعدمتين ($\alpha + \beta = 90^\circ$)فإن $\sin \alpha = \cos \beta$ و $\cos \beta = \sin \alpha$ و $\tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}$ و $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ و $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ و $\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$ **3 -** النسب المثلثية لزاوية خاصة :

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

نصوص التمارين

- (1)** ليكن ABC مثلث بحيث $AB=3$ و $AC=4$ و $BC=5$
أ - بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A
ب - أحسب النسب المثلثية للزاوية $[A\hat{B}C]$

(2) α قياس زاوية حادة غير منعدمة

أ - بين أن $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$

ب - بين أن $1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$

(3) α قياس زاوية حادة

أحسب $\cos(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$ في الحالات التالية:

أ- $\sin(\alpha)=0,3$ ب - $\sin(\alpha)=\frac{5}{7}$ ج - $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

(4) α قياس زاوية حادة

أحسب $\sin(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$ في الحالات التالية:

أ- $\cos(\alpha)=0,6$ ب - $\cos(\alpha)=\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ج - $\cos(\alpha)=\frac{4}{5}$

(5) α قياس زاوية حادة

أحسب $\sin(\alpha)$ و $\cos(\alpha)$ في الحالات التالية:

أ- $\tan(\alpha) = \sqrt{7}$ ب - $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$ ج - $\tan(\alpha) = 6$

(6) α قياس زاوية حادة غير منعدمة بين أن:

أ - $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \times \cos^2(\alpha) - 1$

ب - $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \times \sin^2(\alpha)$

ج - $(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))^2 = 2$

(7) α قياس زاوية حادة غير منعدمة

بسط التعابير التالية

أ . $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 - 1$

ب . $\cos^2(\alpha) + 2\sin^2(\alpha) - 1$

ج . $\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \times \cos^2(\alpha)$

د . $\sin^5(\alpha) + \sin^3(\alpha) \times \cos^2(\alpha)$

هـ. $\cos^4(\alpha) - \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) - \sin^4(\alpha)$

(8) أحسب قيمة كل من A و B و C
 $A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 42^\circ + \cos^2 80^\circ + \cos^2 48^\circ$
 $B = 3\cos 35^\circ - \sin 70^\circ + \cos 20^\circ - 3\sin 55^\circ$
 $C = 2\cos^2 25^\circ + \sin 13^\circ + 2\cos^2 65^\circ - \cos 77^\circ$

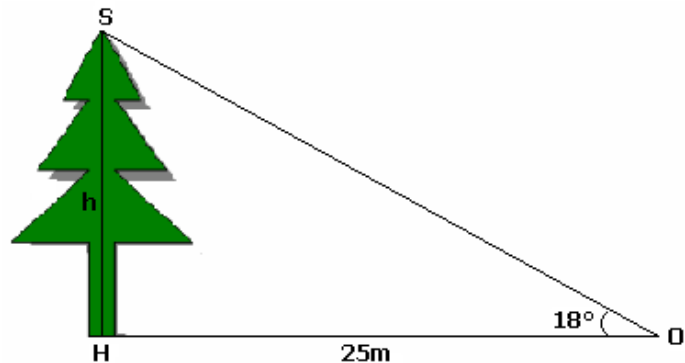
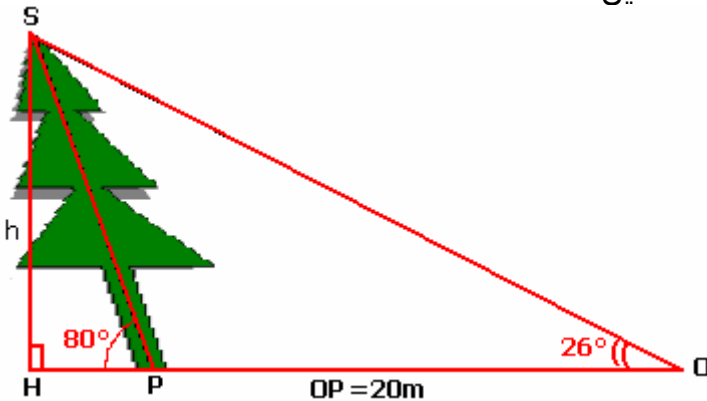
(9) باستعمال المحسبة:
 أ) أعط قيم مقربة ل $\cos(\alpha)$ و $\sin(\alpha)$ و $\tan(\alpha)$
 • إذا كانت $\alpha = 27^\circ$
 • إذا كانت $\alpha = 65^\circ$
 ب) أعط قيم مقربة ل α في الحالات التالية:
 $\tan \alpha = 2,1445$, $\sin \alpha = 0,5299$, $\cos \alpha = 0,9781$

(10) أوجد قيمة α إذا علمت أن $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$
 أ) $\tan \alpha - 2\sin \alpha = 0$
 ب) $2\cos^2 \alpha - \sqrt{3}\cos \alpha = 0$
 ج) $\tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$

(11) α قياس زاوية حادة. أحسب $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$
 إذا علمت أن $\frac{\sin \alpha}{3} = \frac{\cos \alpha}{4}$

(12) ABC مثلث قائم الزاوية في A مساحته S
 (1) بين أن : $AB \times AC = 2S$
 (2) نفترض أن $\tan \hat{A}CB = \frac{1}{2}$ و $S = 6,25$
 أ - أحسب AB و AC
 ب - استنتج BC

(13) أحسب h ارتفاع الشجرة في كل من الحالتين:



(14) ليكن ABC مثلث زواياه كلها حادة
و ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

أ - أحسب AH بدلالة AB و $\hat{A}BC$

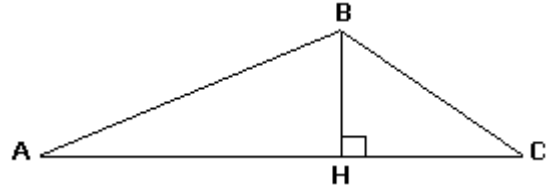
ب - بين أن مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{A}BC$

ج - استنتج من ذلك أن $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}}$

(15) ABC مثلث زاويته $[\hat{B}AC]$ حادة لتكن H المسقط العمودي للنقطة B على (AC)
(انظر الشكل)

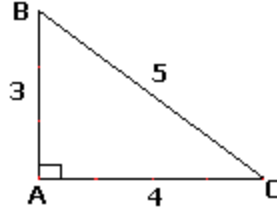
أ - أحسب BC^2 بدلالة AB و AC و AH

ب - استنتج : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{B}AC$



حلول التمارين

(1



أ) لدينا $AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25$
 $BC^2 = 25$ و

إذن $AB^2 + AC^2 = BC^2$

و بالتالي حسب مبرهنة فيثاغورس : ABC مثلث قائم الزاوية في A

ب) $\tan \hat{A}BC = \frac{AC}{AB}$ و $\sin \hat{A}BC = \frac{AC}{BC}$ و $\cos \hat{A}BC = \frac{AB}{BC}$

أي $\tan \hat{A}BC = \frac{4}{3}$ و $\sin \hat{A}BC = \frac{4}{5}$ و $\cos \hat{A}BC = \frac{3}{5}$

(2 $0 < \alpha < 90^\circ$) أ

($\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$)

لدينا $1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

$= \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

لأن $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$= \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

إذن $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

ب) لدينا $1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}$

$= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

$= \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

إذن $1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

(3 $0 < \alpha < 90^\circ$)

$\sin \alpha = 0,3$

$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

حسب العلاقة

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha && \text{لدينا} \\ &= 1 - 0,09 \\ &= 0,91\end{aligned}$$

$$\cos \alpha > 0 : \text{ لأن } \cos \alpha = \sqrt{0,91} = \sqrt{\frac{91}{100}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و حسب العلاقة}$$

$$\tan \alpha = \frac{0,3}{\frac{\sqrt{91}}{10}} \quad \text{نحصل على}$$

$$\tan \alpha = \frac{3\sqrt{91}}{91} \quad \text{أي}$$

$$\text{ملاحظة : يمكن كذلك استعمال العلاقة } 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{لحساب } \tan \alpha$$

باستعمال $\sin \alpha$ مباشرة

$$\sin \alpha = \frac{5}{7} \quad (\text{ب})$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad (\text{مثل أ})$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{25}{49} \\ &= \frac{49 - 25}{49}\end{aligned}$$

$$= \frac{24}{49}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{24}{49}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{5\sqrt{6}}{12} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{(ج)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{(مثل أ)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{4}{9}$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{أي}$$

$$0 < \alpha < 90^\circ \quad \text{(4)}$$

$$\cos \alpha = 0,6 \quad \text{(أ)}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \text{حسب العلاقة}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{لدينا}$$

$$= 1 - 0,36$$

$$= 0,64$$

$$\sin \alpha > 0 \text{ و } \sin \alpha = \sqrt{0,64} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = 0,8 \quad \text{إذن}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و لدينا}$$

$$\tan \alpha = \frac{0,8}{0,6} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \quad \text{أي}$$

ملاحظة : يمكن كذلك استعمال العلاقة $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ (التمرين 1) لحساب $\tan \alpha$

باستعمال $\cos \alpha$ مباشرة.

$$\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5} \quad (\text{ب})$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad (\text{مثل أ})$$

$$= 1 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{18}{25}$$

$$= \frac{7}{25}$$

أي

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}$$

أي

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

و

$$\frac{\sqrt{7}}{\frac{3\sqrt{2}}{5}}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{3\sqrt{2}}$$

أي

$$\frac{5}{6}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

أي

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (\text{ج})$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad (\text{مثل أ})$$

$$= 1 - \frac{16}{25}$$

$$= \frac{9}{25}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

أي

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

و

$$\frac{3}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{5}{4}$$

أي

$$\frac{3}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{أي}$$

$$0 < \alpha < 90^\circ \quad (5)$$

$$\tan \alpha = \sqrt{7} \quad (\text{أ})$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{حسب العلاقة}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + (\sqrt{7})^2 \quad \text{لدينا}$$

$$= 1 + 7 = 8$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{8} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha > 0 \quad \text{لأن} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{8}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{أي}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{و لدينا}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{7} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{14}}{4} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \quad (\text{ب (مثل أ)})$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{25}{16}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{أي}$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha \quad \text{و}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \quad (\text{ج (مثل أ)})$$

$$=1+36$$

$$=37$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{37} \quad \text{أ}^ف$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{37}}{37} \quad \text{أ}^ف$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha \quad \text{و}$$

$$= \frac{\sqrt{37}}{37} \times 6$$

$$= \frac{6\sqrt{37}}{37} \quad \text{أ}^ف$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \quad 0 < \alpha < 90^\circ \quad \text{(6 أ)}$$

$$= \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha$$

$$= 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad \text{أ}^ف$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \quad \text{(ب)}$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{أ}^ف$$

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \quad \text{(ج)}$$

$$= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\cos \alpha \times \sin \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\cos \alpha \times \sin \alpha$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2 \quad \text{أ}^ف$$

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 - 1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \times \cos \alpha \times \sin \alpha - 1 \quad 0 < \alpha < 90^\circ \quad \text{(7 أ)}$$

$$= 1 - 2\cos \alpha \sin \alpha - 1$$

$$= -2\cos \alpha \sin \alpha$$

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 - 1 = -2\cos \alpha \sin \alpha \quad \text{أ}^ف$$

$$\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha - 1 = 1 - \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha - 1 \quad \text{(ب)}$$

$$= \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha - 1 = \sin^2 \alpha \quad \text{أ}^ف$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \times \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \quad \text{(ج)}$$

$$= \cos^2 \alpha \times \cos^2 \alpha$$

$$= \cos^4 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \times \cos^2 \alpha = \cos^4 \alpha \quad \text{أ}^ف$$

$$\sin^5 \alpha + \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^3 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \quad (د)$$

$$= \sin^3 \alpha$$

$$\sin^5 \alpha + \sin^3 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^3 \alpha$$

أي

أي

$$A = \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad (هـ)$$

و باستعمال المتطابقة الهامة $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ نحصل على

$$A = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$\text{لأن } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad A = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

$$= 0$$

$$\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha = 0$$

أي

ملاحظة هناك طرق أخرى مثل :

$$\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha - \sin^4 \alpha$$

$$= \cos^4 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1 - \sin^4 \alpha$$

$$= (1 - \cos^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha$$

$$= (\sin^2 \alpha)^2 - \sin^4 \alpha$$

$$= \sin^4 \alpha - \sin^4 \alpha$$

$$= 0$$

$$48^\circ + 42^\circ = 90^\circ \text{ لدينا } A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 42^\circ + \cos^2 80^\circ + \cos^2 48^\circ \quad (8)$$

$$(10^\circ + 80^\circ = 90^\circ \text{ و } A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 42^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 42^\circ$$

$$A = \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ + \cos^2 42^\circ + \sin^2 42^\circ$$

$$= 1 + 1$$

$$A = 2 \text{ أي}$$

$$35^\circ + 55^\circ = 90^\circ \text{ لدينا } B = 3\cos 35^\circ - \sin 70^\circ + \cos 20^\circ - 3\sin 55^\circ$$

$$(70^\circ + 20^\circ = 90^\circ \text{ و } B = 3\cos 35^\circ - \sin 70^\circ + \sin 70^\circ - 3\cos 35^\circ$$

$$= 0$$

$$B = 0 \text{ أي}$$

$$25^\circ + 65^\circ = 90^\circ \text{ لدينا } C = 2\cos^2 25^\circ + \sin 13^\circ + 2\cos^2 65^\circ - \cos 77^\circ$$

$$(13^\circ + 77^\circ = 90^\circ \text{ و } C = 2\cos^2 25^\circ + \sin 13^\circ + 2\sin^2 25^\circ - \sin 13^\circ$$

$$= 2(\cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ)$$

$$= 2$$

$$C = 2 \text{ أي}$$

(9) نحرس أولاً أن نجعل الوحدة المستعملة هي الدرجة (Degrés)

(أ) نكتب 27 و نضغط على زر cos و نقرأ: (أو العكس حسب المحسبة)

$$\tan \alpha \approx 0,5095$$

$$\sin \alpha \approx 0,454$$

$$\cos \alpha \approx 0,891$$

ب) نكتب 0,9781 ثم نضغط على Shift ثم cos فيما بعد و نقرأ $\alpha \approx 12^\circ$
 و نفس الشيء للحالتين الأخرتين
 $\sin \alpha = 0,5299$ نقرأ $\alpha \approx 32^\circ$
 $\tan \alpha = 2,1445$ نقرأ $\alpha \approx 65^\circ$

(10) ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

$$\tan \alpha - 2 \sin \alpha = 0 \quad (\text{أ})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \sin \alpha = 0 \quad \text{تكافئ :}$$

$$((0^\circ < \alpha < 90^\circ) \text{ لأن } \cos \alpha \neq 0) \quad \frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha} = 0 \quad \text{تكافئ :}$$

$$\sin \alpha (1 - 2 \cos \alpha) = 0 \quad \text{تكافئ :}$$

$$1 - 2 \cos \alpha = 0 \text{ أو } \sin \alpha = 0 \quad \text{تكافئ :}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \text{ أو } \sin \alpha = 0 \quad \text{أي}$$

أي $\alpha = 0^\circ$ أو $\alpha = 60^\circ$ حسب النسب المثلثية للزوايا الخاصة
 لكن $\alpha \neq 0$ إذن قيمة α هي 60°

$$2 \cos^2 \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\cos \alpha (2 \cos \alpha - \sqrt{3}) = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\cos \alpha = 0 \text{ أو } 2 \cos \alpha - \sqrt{3} = 0 \quad \text{تكافئ}$$

$$\cos \alpha = 0 \text{ أو } \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{تكافئ}$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ أو } \alpha = 30^\circ \quad \text{تكافئ}$$

لكن $\alpha \neq 90^\circ$ إذن قيم α هي 30°

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{ج})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \text{تكافئ}$$

$$(\cos \alpha \neq 0) \quad \sin \alpha = 1 \quad \text{تكافئ}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{تكافئ}$$

لكن $\alpha \neq 90^\circ$ إذن لا توجد قيمة ل α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) تحقق المتساوية.

(11) ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

$$\frac{\sin \alpha}{3} = \frac{\cos \alpha}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{9} = \frac{\cos^2 \alpha}{16} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{9} = \frac{\cos^2 \alpha}{16} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{9 + 16} = \frac{1}{25} \quad \text{و منه}$$

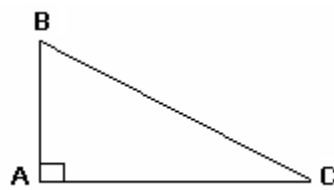
$$\frac{\cos^2 \alpha}{16} = \frac{1}{25} \quad \text{و} \quad \frac{\sin^2 \alpha}{9} = \frac{1}{25} \quad \text{و منه}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \quad \text{أي}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} \quad \text{أي}$$

لأن $\cos \alpha > 0$ و $\sin \alpha > 0$

$$\frac{\sin \alpha}{3} = \frac{\cos \alpha}{4} \quad \text{و نتحقق بسهولة أن}$$



(12

1. إذا أخذنا [AB] كقاعدة فإن [AC] هو الارتفاع المرتبط بها لأن (AB) و (AC) متعامدان

$$\frac{AB \times AC}{2} \quad \text{هي مساحة المثلث ABC}$$

$$S = \frac{AB \times AC}{2} \quad \text{أي}$$

$$2S = AB \times AC \quad \text{أي}$$

2. نفترض أن $\tan \hat{A}CB = \frac{1}{2}$ و $S = 6,25$

أ - نحسب AB و AC

$$\tan(\hat{A}CB) = \frac{AB}{AC} \quad \text{في المثلث ABC}$$

$$\text{أي } \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \quad \text{و } 2AB = AC \quad (1)$$

$$\text{و حسب (1) } AB \times AC = 2 \times 6,25 \quad (2)$$

من (1) نحصل في (2) على :

$$AB \times 2AB = 2 \times 6,25$$

$$AB > 0 \quad \text{و} \quad AB^2 = 6,25 \quad \text{أي}$$

$$AB = \sqrt{6,25} \quad \text{و منه}$$

$$AB = 2,5 \quad \text{أي}$$

$$\text{ومن (1) نحصل على } AC = 2AB$$

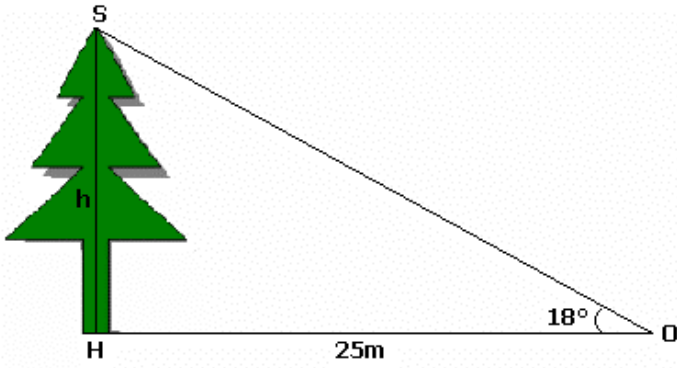
$$= 2 \times 2,5$$

$$AC = 5 \quad \text{أي}$$

(ب) قائم الزاوية في A إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة $AB^2+AC^2=BC^2$
 أي $BC^2=(2,5)^2+5^2$
 أي $=6,25+25$
 أي $=31,25$

و منه $BC = \sqrt{31,25}$

أي $BC = \frac{5\sqrt{5}}{2}$



(13) أ) المثلث OSH قائم الزاوية في H

لدينا $\tan \hat{HOS} = \frac{HS}{OH}$

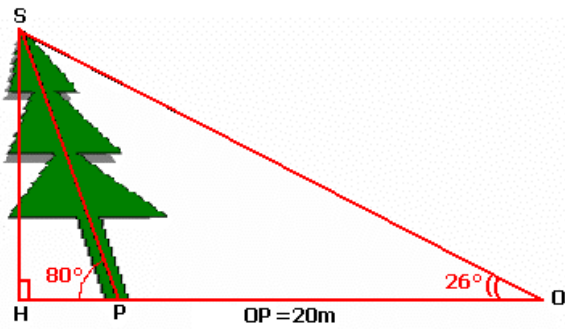
أي $HS = OH \times \tan \hat{HOS}$

أي $HS = 25 \times \tan 18^\circ$

أي $HS = 25 \times 0,3249$

أي **HS = 8,1225**

إذن ارتفاع الشجرة هو **8,1225 m** (قيمة مقربة)



ب) المثلث OSH قائم الزاوية في H

لدينا $\tan \hat{HOS} = \frac{HS}{OH}$

أي $HS = OH \times \tan \hat{HOS}$

أي (1) $HS = OH \times \tan 26^\circ$

و كذلك المثلث HSP قائم الزاوية في H

إذن $\tan \hat{HPS} = \frac{HS}{HP}$

إذن $HS = \tan \hat{HPS} \times HP$

أي (2) $HS = \tan 80^\circ \times HP$

ومن (1) و (2) نستنتج أن $\tan 26^\circ \times OH = \tan 80^\circ \times HP$

ولدينا $OH = OP + HP$ لأن $P \in [HO]$

إذن $OH = 20 + HP$

إذن $\tan 26^\circ (20 + HP) = \tan 80^\circ \times HP$

أي $20 \times \tan 26^\circ + HP \times \tan 26^\circ = HP \times \tan 80^\circ$

أي $20 \times \tan 26^\circ = (\tan 80^\circ - \tan 26^\circ) \times HP$

أي (3) $HP = \frac{20 \cdot \tan 26^\circ}{\tan 80^\circ - \tan 26^\circ}$

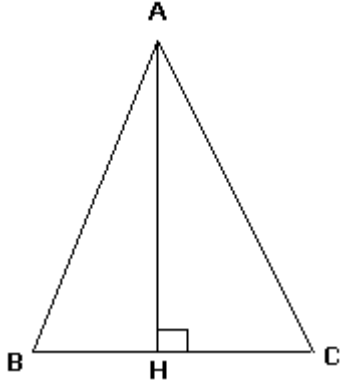
و نعود إلى (2) : $HS = \tan 80^\circ \times HP$

إذن من (2) و (3) نستنتج أن $HS = \frac{20 \cdot \tan 26^\circ \times \tan 80^\circ}{\tan 80^\circ - \tan 26^\circ}$

أي $HS = 10,6725 \text{ m}$

إذن ارتفاع الشجرة هو **10,6725 m** (قيمة مقربة)

A REVOIR



(14) أ (المثلث ABH قائم الزاوية في H

$$\sin \hat{ABH} = \frac{AH}{AB} \quad \text{إذن}$$

أي $\hat{ABH} = \hat{ABC}$ ولدينا $AH = AB \cdot \sin \hat{ABH}$

$$AH = AB \cdot \sin \hat{ABC} \quad \text{إذن}$$

ب (في المثلث ABC نعتبر [BC] كقاعدة إذن [AH] هو الارتفاع المرتبط بها :

و منه مساحة المثلث ABC (نرمل لها ب $\mathcal{A}(ABC)$)

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} \quad \text{تساوي}$$

$$AH = AB \cdot \sin \hat{ABC} \quad \text{و حسب أ)}$$

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{ABC} \quad \text{إذن (1)}$$

$$(2) \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{BAC} \quad \text{ج (بالمثل يمكن أن نبين أن$$

$$(3) \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{BCA} \quad \text{و كذلك}$$

ومن (1) و (2) و (3) نستنتج أن :

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{BAC} = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{CBA} = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{BCA}$$

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{C} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} \quad \text{أي}$$

$$\frac{1}{2} \times BA \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times CA \times CB \times \sin \hat{C} \quad \text{و}$$

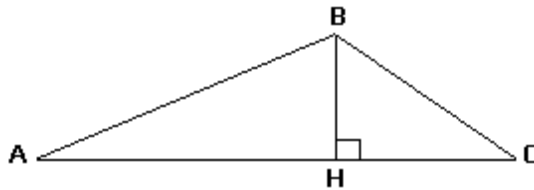
$$BA \times \sin \hat{B} = CA \times \sin \hat{C} \quad \text{و} \quad AC \times \sin \hat{A} = BC \times \sin \hat{B} \quad \text{أي}$$

$$(5) \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \quad \text{و} \quad \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \quad (4) \quad \text{أي}$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \quad \text{ومن (4) و (5) نستنتج أن}$$

(وتسمى هذه العلاقة بعلاقة الجيب (sinus) في مثلث)

(15



أ) لدينا المثلث BCH قائم الزاوية في H
إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة: $BC^2 = BH^2 + CH^2$
ولدينا $CH = AC - AH$

$$(1) BC^2 = BH^2 + (AC - AH)^2$$

ولدينا كذلك المثلث ABH قائم الزاوية في H
إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة: $AB^2 = BH^2 + AH^2$

$$(2) BH^2 = AB^2 - AH^2$$

إذن من (1) و (2) نستنتج أن: $BC^2 = AB^2 - AH^2 + (AC - AH)^2$
 $= AB^2 - AH^2 + AC^2 + AH^2 - 2AC \cdot AH$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH \quad \text{أي}$$

$$(1) BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH \quad \text{ب) حسب أ)}$$

ولدينا في المثلث ABH القائم الزاوية في H

$$\cos \hat{BAH} = \frac{AH}{AB} \quad \text{و} \quad \hat{BAH} = \hat{BAC}$$

$$(2) AH = AB \cdot \cos \hat{BAC} \quad \text{أي}$$

ومن (1) و (2) نستنتج أن

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{BAC}$$

وهذه العلاقة هي تعميم لمبرهنة فيثاغورس في حالة مثلث أحد زواياه حادة ، وهذا التعميم هو مبرهنة الكاشي و هو من العلماء المسلمين المتوفى حوالي سنة 1436 ميلادية.

